# Colle du 18/03 - Sujet 1
# Espaces vectoriels et séries

**Question de cours.** Démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

**Exercice 1.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $F = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Montrer que $F$ est un espace vectoriel et déterminer un supplémentaire à $F$ dans $E$.

**Exercice 2.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!2^n}$ converge et calculer sa somme totale.

---



# Colle du 18/03 - Sujet 2
# Espaces vectoriels et séries

**Question de cours.** Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

**Exercice 1.** *(Règle de D'Alembert)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge et on note $\ell$ sa limite.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$ ?

**Exercice 2.** On pose $E = \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $g : t \mapsto \mathrm{e}^t$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ puis montrer que

$$F \oplus \operatorname{Vect}(g) = E.$$

---



# Colle du 18/03 - Sujet 3
# Espaces vectoriels et séries

**Question de cours.** Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

**Exercice 1.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

**Exercice 2.** Soit $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_0 = u_1 = u_2 = 0 \right\}$. Montrer que $F$ un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer un supplémentaire de $F$.